326.516 확률론 2 (Probability Theory 2)
2025 2학기 (2nd Semester)

김지수 (Jisu KIM)

2025-09-02

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

마팅게일 (Martingale)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)

확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

- $\mathbb{E}[X|Y]$ 를 엄밀화
- σ-대수 $\mathcal{G}$에 대한 조건부 기댓값 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$: $\mathcal{G}$-가측(measurable) 함수로 X의 "최적 추정값"
- 주요 성질: 선형성, 타워 성질, $\mathcal{G}$-가측성(measurable).

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$에서 $X \in L^1$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$이면
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$는 $\mathcal{G}$-가측(measurable) 함수 Y로

$$\int_G Y \, d\mathbb{P} = \int_G X \, d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

.

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

마팅게일 (Martingale)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)

확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

마팅게일 (Martingale)

- 적응된 과정 $\{X_n\}$이 $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$이고

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n,$$

  이면 마팅게일.
- "공정한 게임"을 수학적으로 모델링.

마팅게일 (Martingale) 예시

- 대칭 랜덤워크 $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ ($\xi_i \sim \pm 1$ 독립, $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$)는 마팅게일.
- 조건부 기댓값: $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$는 마팅게일.
- 연속시간: 브라운 운동 B_t는 마팅게일.

Doob 부등식

- 마팅게일의 최대치 제어 $\rightarrow$ L^p 수렴 결과로 이어짐.
- $p > 1$일 때 강력한 불평등 제공.

Doob 부등식

- $\{X_t\}$ 비음수 마팅게일, $p > 1$이면

$$\left\| \sup_{t \leq T} X_t \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_T\|_p.$$

L^p 수렴정리

- L^p-bounded 마팅게일($p > 1$)은 a.s. 및 L^p에서 수렴한다.

균등적분가능성 (Uniform Integrability)

- $p = 1$: 단순한 L^1 제어로는 부족 $\to$ 균등 적분가능성(Uniform Integrability, UI)이 필요.
- UI는 약수렴과 L^1 수렴을 연결하는 핵심 개념.

균등적분가능성 (Uniform Integrability)

- X_n 집합이 UI이면

$$\lim_{K\to\infty}\sup_n \mathbb{E}[|X_n| 1_{\{|X_n|>K\}}] = 0.$$

L^1 수렴 정리

- $X_n \to X$ a.s.이고 $\{X_n\}$이 UI이면
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0.$$

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

마팅게일 (Martingale)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)

확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

- 가우시안 프로세스(GP): 유한 차원 주변분포가 모두 다변량 정규분포인 확률과정.
- 브라운 운동 B_t: 연속 경로, 정상적이고 서로 독립인 증가분을 갖는 GP의 전형적 예.
- 활용: 커널 회귀, 확률미적분(이토 해석), 물리(확산), 금융 (Black--Scholes), 심층학습 - 확산 모형(Deep Learning - Diffusion Model)

가우시안 프로세스(Gaussian Process)

- 프로세스 $\{X_t\}_{t \in T}$가 임의의 $t_1, \ldots, t_n \in T$에 대해
- $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(m, K)$
- 이면 가우시안 프로세스(Gaussian Process)라 한다. 여기서 $m_i = \mathbb{E}[X_{t_i}]$, $K_{ij} = \mathrm{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j})$.

브라운 운동(Brownian Motion)

- 프로세스 $\{B_t\}_{t\geq 0}$가 다음 세가지를 만족하면 브라운 운동이라 한다.
  - $B_0 = 0$ a.s.,
  - $t_0 < \cdots < t_n$이면 $B(t_0), B(t_1) - B(T_0), \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1})$이 독립 (증가분 독립),
  - $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ $(0 \leq s < t)$

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

마팅게일 (Martingale)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)

확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

- 확률측도들의 공간을 생각하면 어떤 이점이 있는지 알아본다.
- 최적수송(Optimal Transport): $P \mapsto Q$로 옮기는 비용 최소화한다.
- Wasserstein 기하: 확률측도 공간에 거리 W_p를 주어 기하학적 구조를 부여.

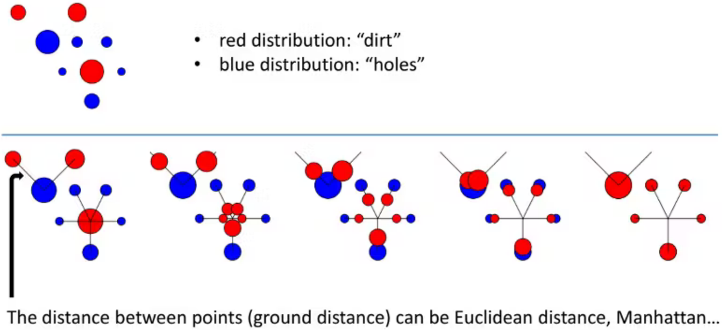
Wasserstein distance는 하나의 확률분포를 다른 확률분포로 옮기는 데에 비용이 얼마나 드는지 계산합니다.

- Kantorovich 최적 수송:

$$W_p(P, Q) = \inf_{\pi \in \Pi(P,Q)} \int d(x, y)^p d\pi(x, y).$$

Wasserstein distance는 하나의 확률분포를 다른 확률분포로 옮기는 데에 비용이 얼마나 드는지 계산합니다.

- $$W_p(P, Q) = \inf_{\pi \in \Pi(P,Q)} \int d(x, y)^p d\pi(x, y).$$
- $p = 1$일 때 Earth Mover distance라고도 부릅니다: 흙을 옮겨서 구멍을 메우는 데에 필요한 노동력을 뜻합니다.



[1]

[1] https://anebz.eu/earth-mover-distance

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

마팅게일 (Martingale)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)

확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

- 독립(또는 약한 의존)일 때 1-Lipschitz 함수는 평균/중앙값 부근에 급격히 집중.
- 도구: 서브가우시안, Hoeffding/Azuma, 수송부등식 등

Lévy의 보조정리(Lévy's lemma)

- $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$가 1-Lipschitz이면 중앙값 $\mathrm{med}(f)$에 대해

$$\mathbb{P}\left(|f(U) - \mathrm{med}(f)| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{(n-2)\varepsilon^2}{2}\right),$$

여기서 $U \sim \mathrm{Unif}(S^{n-1})$.

Talagrand 부등식(Talagrand inequality)

- $Z_1, \ldots, Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$이고 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$가 1-Lipschitz이면 중앙값 $\mathrm{med}(f)$에 대해

$$\mathbb{P}\left(|f(Z_1, \ldots, Z_n) - \mathrm{med}(f)| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right).$$

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

마팅게일 (Martingale)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)

확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

하우스도르프 측도 및 차원(Hausdorff measure and dimension)

- 하우스도르프 측도(Hausdorff measure): 르베그 측도(Lebesgue measure)로는 잘 포착되지 않는 불규칙 집합의 크기를 측정
- 다양체(manifold)의 균일 측도(uniform measure)를 정의하기 가장 쉬운 방식이 하우스도르프 측도(Hausdorff measure)

하우스도르프 측도(Hausdorff measure)

- $E \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$에 대해
- $\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\left\{ \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^s : \; E \subset \bigcup_i U_i, \; \operatorname{diam} U_i < \delta \right\}, \quad \mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$

하우스도르프 차원(Hausdorff measure dimension)

- $$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}.$$

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

마팅게일 (Martingale)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)

확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

- 그래프/다양체 상 임의보행(Random Walk)은 열 흐름을 근사
- 라플라시안(Laplacian)은 혼합, 확장성, 확산과 깊게 연결
- 그래프/다양체의 대수/기하 구조와 연결이 깊음

임의보행과 대수/기하와의 연계성 (Random Walk and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

- 그래프 $G = (V, E)$에서 임의보행(random walk)을 전이행렬 $P(u, v) = \frac{I((u,v)\in E)}{\sum_{v\in V} I((u,v)\in E)}$로 생각합니다.
- 술 취한 사람은 집을 찾아가지만, 술 취한 새는 영원히 길을 잃을 수 있다 (A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever): $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$의 임의보행은 재귀(recurrent)이지만 $\mathbb{R}^3$은 일시(transient)입니다.

라플라시안과 대수/기하와의 연계성 (Laplacian and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

- 그래프 $G = (V, E)$에서 라플라시안(Laplacian)은 $L = I - P$ 또는 $L = D - W$.
- 라플라시안은 그래프/다양체의 위상 정보와 연결이 깊습니다.

- 조건부 기댓값 (Conditional Expectation)
- 마팅게일 (Martingale)
- 가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)
- 확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)
- 고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)
- 확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)
- 확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)
- 확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)
- 랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Group Action, Haar measure)

- 군 작용(Group Action)은 에르고딕 방법론(Ergodic Theory)의 기초 제공
- 하르(Haar) 측도: 군 작용에 불변인 측도
- $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$일 때 $\frac{Z}{\|Z\|_2}$이 S^{n-1}에서 균일 분포 (uniform distribution)임을 보일 수 있습니다.

확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Group Action, Haar measure)

- 군 작용 $\cdot : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$: 항등원 e에 대해 $e \cdot x = x$, 그리고 $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.
- 하르(Haar) 측도 μ: 모든 가측 E와 $g \in G$에 대해 $\mu(gE) = \mu(E)$.
- 적당한 조건 하에 하르(Haar) 측도는 상수배를 제외하면 유일하게 존재

조건부 기댓값 (Conditional Expectation)

마팅게일 (Martingale)

가우시안 프로세스와 브라운 운동(Gaussian Process and Brownian Motion)

확률측도 공간 및 최적 수송(Space of Probability Measures and Optimal Transport)

고차원 확률: 측도의 집중현상(Probability in High Dimension: Concentration of Measure)

확률과 기하: 하우스도프 측도 및 차원 (Probability and Geometry: Hausdorff measure and dimension)

확률과 대수/기하: 임의보행, 라플라시안과 공간의 대수/기하와의 연계성 (Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces)

확률과 대수/기하: 확률과 군 작용, 하르 측도 (Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

랜덤 행렬 이론 (Random Matrix Theory)

- 큰 랜덤 행렬의 고유값 통계와 보편성(universality)을 연구
- 응용: 물리(양자 카오스), 통계(PCA), 수론(ζ의 영점 통계와의 유사성).

Wigner 반원법칙

- 분산 σ^2/n을 갖는 Wigner 행렬 W_n의 경험 스펙트럼 분포는 거의 확실하게
$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{(4\sigma^2 - x^2)_+}$$
로 수렴

Marchenko-Pastur 법칙

- 비율 $\gamma = \lim p/n \in (0, \infty)$에서 표본 공분산 $S_n = \frac{1}{n} XX^\top$의 경험 분포는 MP_γ에 수렴하며 지지는 $[(1-\sqrt{\gamma})^2, (1+\sqrt{\gamma})^2]$.